2. Комплекс айнымалыға байланысты функция ұғымы. Шегі. Үзіліссіздігі.

Комплексті айнымалының функциялары. 3-ші анықтау.

Егер әрбір нүктеге (бірмәнді функция)бірінші сәйкестікке немесе (көп мәнді фукция)бірнеше міндер орнатылса В төңірегіндегі функция я кешенді жазықтықтың нүктелерінің кешенді жазықтықтың нүктелерінің кешенді жазықтықтың тиісті нүктелеріне бейнені жүзеге асырады

Кешенді функцияның аралығында тәуелділік сонда және комплексті айнымалысы екі нақты функциялар $z = x + iy$ және $\omega = u + iv$ нақты айнымалы x және y көмегімен сипаттама алады

$\omega = f(z) = u + iv, \quad u = u(x;y), \; v = v(x;y), \quad z \in D$

Комплексті айнымалының кейбір қарапайым функцияларын қарап шығарамыз:

1.Бөлшекті тиімді функция

$$\omega = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m},$$

Тиімді функция жеке алғанда көпмүшені болып табылады

2.Көрнекті функция e^z абсолютті қиындасатын дәрежелі қатардың барлық кешенді жазықтыңындағы сомасымен анықталады $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$

Көрнекті функция келесі қасиеттермен ие болады

а) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$,

б) Демек периодтық функция $2\pi i$. $\quad e^{z + 2k\pi i} = e^z, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$

3.Тригонометриялық функциялар $\sin z$ және $\cos z$ дәрежелі қатарлармен анықталады

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Функциялар $\omega = \cos z$ және $\omega = \sin z$ периодты нақты мерзімінен 2π және сәйкесінше тек қана 0-дер алады.

$$z = \frac{\pi k}{2} + k\pi \qquad z = k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

e^z, $\sin z$, $\cos z$ Эйлер функциясымен байланысты

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \qquad e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$

осыдан

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Функциялар $\mathrm{tg}\ z$ және $\mathrm{ctg}\ z$ теңдіктерменанықталады.Комплексті айнымалыны тригонометриялық функция үшін барлық белгілі формулалары күште қолданады

$$\mathrm{tg}\ z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi k}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\mathrm{ctg}\ z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

4 . Гиперболалық функциялар $\mathrm{sh}\ z, \mathrm{ch}\ z, \mathrm{th}\ z, \mathrm{cth}\ z$ теңдіктерімен анықталады:

$$sh\ z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad ch\ z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad th\ z = \frac{sh\ z}{ch\ z}, \quad cth\ z = \frac{ch\ z}{sh\ z}.$$

5.Тригонометриялық және гиперболалық функциялар өзара келесі байланыстармен байланған

$$\sin z = -i \cdot \mathrm{sh}\ iz, \quad \mathrm{sh}\ z = -i \cdot \sin iz,$$

$$\cos z = \mathrm{ch}\ iz, \quad \mathrm{ch}\ z = \cos iz,$$

$$\mathrm{tg}\ z = -i \cdot \mathrm{th}\ iz, \quad \mathrm{th}\ z = -i \cdot \mathrm{tg}\ iz,$$

$$\mathrm{ctg}\ z = i \cdot \mathrm{cth}\ iz, \quad \mathrm{cth}\ z = i \cdot \mathrm{ctg}\ iz.$$

6.Логорифімдік функция $\mathrm{Ln}\ z$, мұнда $z \neq 0$ кері көрсеткішті функция

$$\mathrm{Ln}\ z = \ln|z| + i \cdot Arg\ z = \ln|z| + i \cdot (\arg z + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, z \neq 0.$$

Бұл функциялар көп мәнді болып табылады.Бас мәнімен $\mathrm{Ln}\ z$ онда жанында пайда болатын мән $k = 0$;онда ол $\ln z$:

$\ln z = \ln|z| + i \cdot \arg z$ анығында

$$\mathrm{Ln}\ z = \ln z + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

7.Кері тригонометриялық функциялар және гиперболалық функциялар $\mathrm{Arcsin}\ z, \mathrm{Arccos}\ z, \mathrm{Arctg}\ z, \mathrm{Arcctg}\ z,$ $\mathrm{Arsh}\ z, \mathrm{Arch}\ z, \mathrm{Arth}\ z, \mathrm{Arcth}\ z$ функциялармен анықталады ,сәйкесінше кері функция $\mathrm{ctg}\ \omega, \mathrm{sh}\ \omega, \mathrm{ch}\ \omega, \mathrm{th}\ \omega, \mathrm{cth}\ \omega.$ мына барлық функциялар көп мәнді болып табылады және логорифімдік функциялар арқылы өрнектеледі

$$\mathrm{Arcsin}\ z = -i \cdot Ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right); \qquad Arsh\ z = Ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right);$$

$$Arc\cos z = -i \cdot Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right); \qquad Arch\ z = Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right);$$

$$Arctg\ z = -\frac{i}{2} \cdot Ln\frac{1 + iz}{1 - iz}, \qquad Arth\ z = \frac{1}{2} \cdot Ln\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right), \quad z \neq 1;$$

$$Arcctg\ z = -\frac{i}{2} \cdot Ln\frac{z + i}{z - i}; \qquad Arcth\ z = \frac{1}{2} \cdot Ln\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right), \quad z \neq 1.$$

Бас мәндер кері тригонометриялық және гиперболалық функциялар

$\mathrm{arcsin}\ z,\ \mathrm{arccos}\ z,\ \mathrm{arctg}\ z,\ \mathrm{arcctg}\ z,\ \mathrm{arsh}\ z,\ \mathrm{arch}\ z,\ \mathrm{arth}\ z,\ \mathrm{arcth}\ z$

Егер тиісті логорифмдік функцияның бас мәндерді алса

8.Ортақ дәрежелі функция $\omega = z^a$, мұнда $a = \alpha + i \cdot \beta$ кез келген комплексті сан, теңдікпен анықталады $z^a = e^{a \cdot Lnz}, \quad z \neq 0$

Бұл функциялар көп мәнді,оның бас мәні $z^a = e^{a \cdot \ln z}$ болады.

9.Ортақ көрнекті функция $\omega = a^z$ кез келген сан,теңдікпен анықталады $a^z = e^{z \cdot Lna}$

Бұл функциялар көп мәнді,оның бас мәні $a^z = e^{z \cdot \ln a}$